

1. OPTIMITZACIÓ

1.1 OPTIMITZACIÓ AMB RESTRICCIONS D'IGUALTAT.

1.1.1 PLANTEJAMENT FORMAL DEL PROBLEMA.

L'optimització matemàtica és un instrument clau en l'àmbit de l'economia i de l'empresa.

Hom pot dir que l'optimització permet assignar, de manera eficient, recursos escassos entre activitats econòmiques alternatives. Doncs bé, quan aquests recursos, a més, cal esgotar-los, l'optimització restringida ho serà per igualtats. A tall d'exemple, considerem el següent exemple econòmic:

Exemple: Se sap que la funció de producció d'un fabricant d'un cert producte P depèn de dos factors de producció, sent de tipus Cobb-Douglas de la forma:

$$Q(x, y) = 4 \cdot x^{0,5} \cdot y^{0,5} \text{ unitats}$$

on $x > 0$ i $y > 0$ indiquen, respectivament, les unitats emprades en cadascun dels dos factors. Si els costos unitaris d'aquets factors són constants i iguals a 2 i 8 u.m., el fabricant vol esbrinar quin seria el cost mínim de produir 32 unitats de P, així com el nivell de cadascun dels dos factors emprats.

Obtener las dimensiones de un rectángulo de perímetro 100 m. que maximiza su área.

Així doncs podem definir ara, amb tota generalitat, la noció de programa:

Definició: Un **programa d'òptims restringits** o **condicionats per igualtats** (programa a partir d'ara) és un problema d'optimització que adopta la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Optimitzar} \quad z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} \quad \begin{array}{l} g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{array} \end{array} \right.$$

on:

1. $z = f(x_1, \dots, x_n)$ és la **funció escalar objectiu**.
2. $x_1, \dots, x_n$ són les n **variables instrumentals** o **de decisió**.
3. $g_i(x_1, \dots, x_n)$ són les m **funcions escalars de restricció**.
4. $b_1, \dots, b_m$ són les m **constants de restricció**.

Cal tenir en compte que, per regla general, el nombre m d'equacions de restricció ha de ser menor que el nombre n de variables instrumentals.

d'un programa

Definició: El **conjunt factible** (també dit **admissible** o **d'oportunitats**) d'un programa és el conjunt format per tots aquells punts del domini de la funció objectiu que satisfan totes les restriccions d'igualtat associades. De tot punt que hi pertany en direm **punt factible**.

Exemple: Donat el programa:

$$\begin{array}{l} \min \quad C(x, y) = 2x + 8y \\ \text{s. a:} \quad 4x^{0,5}y^{0,5} = 32 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \min \\ \text{s. a:} \end{array}} \right\}$$

1. Determina el seu conjunt factible.
2. Prova que el punt (16,4) n'és un punt factible.

Òptim i valor òptim d'un programa.

Definició: El punt $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ és un **òptim** del programa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Optimitzar} \quad z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} \quad g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ \quad \quad \vdots \\ \quad \quad g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{array} \right.$$

si és un punt factible que optimitza la funció objectiu sobre el conjunt factible associat. Per definició, al valor que pren la funció objectiu en l'òptim:

$$z_0 = f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

li direm **valor òptim** del programa.

Mètode gràfic.

Teorema: L'òptim d'un programa de la forma:

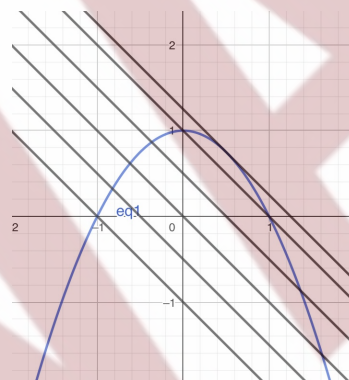
$$\begin{cases} \text{Opt} & z = f(x, y) \\ \text{s. a:} & g(x, y) = b \end{cases}$$

es troba en el punt de tangència de la "corba de restricció" $g(x, y) = b$ amb una de les corbes de nivell c_k de la funció objectiu.

Exemple: Aplicant el mètode gràfic prova que l'òptim del programa:

$$\begin{cases} \max & z = x + y \\ \text{s. a:} & x^2 + y = 1 \end{cases}$$

es troba en el punt $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Mètode directe de resolució

Exemple: Resol aplicant el mètode directe el programa $\begin{cases} \max & u = xy + 2yz + xz \\ \text{s. a:} & x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

Exemple: Aplicant el mètode directe troba els òptims dels programes:

$$(1) \begin{cases} \text{Opt} & z = 2xy \\ \text{s. a:} & x^2 + y = 3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases}$$

1.1.3. MÈTODE MULTIPLICADORS DE LAGRANGE

Definició: La **funció de Lagrange** associada al programa:

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

és la funció escalar de $n + m$ variables definida per:

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot (g_i(x_1, \dots, x_n) - b_i).$$

Les m variables $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ són els **multiplicadors de Lagrange** del programa.

Exemple: Determina la funció de Lagrange dels programes:

$$(1) \begin{cases} \min & z = 2x + 8y \\ \text{s. a:} & 4x^{0,5}y^{0,5} = 32 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \max & u = xy + 2yz + xz \\ \text{s. a:} & x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases}$$

Condició necessària d'optimització restringida Per igualtats. Punt crític d'un programa.

Teorema(Condició necessària d'optimització restringida per igualtats): Si $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ és un òptim del programa:

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

existiran necessàriament m multiplicadors de Lagrange $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0 \in \mathbb{R}$ tal que, juntament amb les n components de l'òptim, anul·len el gradient de la funció de Lagrange:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial x_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial x_n} &= 0 \\ \frac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial \lambda_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial \lambda_m} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

tacionari) d'un programa és un punt factible que anul·la el vector gradient de la funció de Lagrange associada.

Exemple: Determina els punts crítics del programa
$$\begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases}$$

Matriz hessiana restringida d'un programa

Definició: La **matriu hessiana restringida** d'un programa és, per definició, la matriu quadrada i simètrica que té per coeficients les derivades parcials segones de la funció de Lagrange respecte les variables instrumentals:

$$H_{x_1 \dots x_n} L(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Exemple: Calcula la matriu hessiana restringida del programa
$$\begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases}$$

Condicció suficient d'existència d'òptims restringits per igualtats.

Teorema(Condicció suficient d'existència d'òptims restringits per igualtats): Sigui

$(x_1^0, \dots, x_n^0)$ un punt crític del programa:

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

amb m multiplicadors de Lagrange associats $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0 \in \mathbb{R}$. Si la forma quadràtica de matriu simètrica associada:

$$H_{x_1 \dots x_n} L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$$

restringida al subespai vectorial definit pel sistema de m equacions lineals homogènies:

$$\begin{cases} 0 = \nabla g_1(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial g_1(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial g_1(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_n} \cdot x_n \\ \vdots \\ 0 = \nabla g_m(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial g_m(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial g_m(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_n} \cdot x_n \end{cases}$$

és:

1. Definida positiva, el punt crític $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ és un mínim del programa.
2. Definida negativa, el punt crític $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ és un màxim del programa.

Exemple: Prova, aplicant el mètode de Lagrange, que el punt crític $(3, -3, 2)$ amb

multiplicadors de Lagrange associats $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -2$ és un òptim (màxim) del programa:

$$\begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases}$$

Ejemplo 8.8. Optimizar la función:

$$f(x, y) = 6 - 4x - 3y$$

sujeto a la condición

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Problema 8.10. Determina los extremos de las siguientes funciones con la condición que se indica:

b) $z = (x - 1)^2 + y^2$ con la condición $y^2 = 9x$

1.1.4. INTERPRETACIÓ ECONÒMICA DELS MULTIPLICADORS DE LAGRANGE

Teorema: Sigui $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ un òptim del programa:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{array} \right.$$

Aleshores, si la constant de restricció $b_i \in \mathbb{R}$ experimenta una petita variació Δb_i , l'increment Δz_0 que repercuteix en el valor òptim del programa:

$$z_0 = f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

és aproximadament igual al producte del multiplicador de Lagrange corresponent λ_i^0 i de l'increment de la constant de restricció Δb_i . En altres paraules:

$$\Delta z_0 \cong \lambda_i^0 \cdot \Delta b_i.$$

- Si $\lambda_i^0 < 0$ i $\Delta b_i < 0$, el valor òptim z_0 augmentarà aproximadament $\lambda_i^0 \cdot \Delta b_i$.
- Si $\lambda_i^0 < 0$ i $\Delta b_i > 0$, el valor òptim z_0 disminuirà aproximadament $\lambda_i^0 \cdot \Delta b_i$.
- Si $\lambda_i^0 > 0$ i $\Delta b_i < 0$, el valor òptim z_0 disminuirà aproximadament $\lambda_i^0 \cdot \Delta b_i$.
- Si $\lambda_i^0 > 0$ i $\Delta b_i > 0$, el valor òptim z_0 augmentarà aproximadament $\lambda_i^0 \cdot \Delta b_i$.
- Si $\lambda_i^0 = 0$ aleshores, i independentment del valor de Δb_i , el valor òptim z_0 gairebé no variarà.²⁹

Exemple: Resol pel mètode de Lagrange el programa de l'exemple econòmic introductori:

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad C(x, y) = 2x + 8y \\ \text{s. a:} \quad 4x^{0,5}y^{0,5} = 32 \end{array} \right\}$$

tot indicant si és rendible produir una mica més de 32 unitats del producte P.

tenim una cartera d'inversió en dos títols amb unes rendibilitats esperades del 8% i del 4%. Si el risc de la inversió ve mesurat per la funció:

$$\sigma(x, y) = 0,0016x^2 + 0,0004y^2 - 0,00096xy$$

on $x > 0$ i $y > 0$ denoten els tants per cent de la cartera invertits en cada títol, determina:

1. Els valors de $x > 0$ i $y > 0$ que minimitzen el risc de la cartera si volem obtenir una rendibilitat conjunta esperada del 5%.
2. Com es veuria afectat aquest risc si la rendibilitat esperada fos del 5,5%.

EXEMPLE: Una empresa produce dos tipos de bienes A y B en cantidades x e y respectivamente. El coste de producción de los mismos viene dado por la función $C(x, y) = y^2 + x(2x - y)$. Si entre los dos bienes producidos deben totalizarse 10 unidades, determina la cantidad de cada uno de ellos que minimizan el coste.

EXEMPLE: Analiza las consecuencias que tendría en el ejercicio anterior la disminución en dos unidades del número total de bienes producidos, sin resolver nuevamente el problema.

EXEMPLE: Una empresa tiene la siguiente función de producción:
 $f(x, y) = 60x^{1/3}y^{2/3}$, donde x es el coste laboral e y el coste del capital. Si se dispone de 120 u.m., optimiza la función y halla el máximo de producción. Analiza qué ocurre si se aumenta en 5 unidades el presupuesto.

OPTIMITZACIÓ AMB RESTRICCIONS D'IGUALTAT. EXERCICIS FINALS DEL TEMA

1. Resol aplicant el mètode directe:

$$(a) \begin{cases} \min & z = x^2 + 5xy - 1 \\ \text{s. a:} & 3x - y = 0 \end{cases} \quad (b) .$$

$$(b) \begin{cases} \max & u = xy + 3yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 6 \\ & x - y = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \max & u = 3xy + 2xyz \\ \text{s. a:} & 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

2. Resol pel mètode de Lagrange el programa:
$$\begin{cases} \max & u = xy + 2yz + xz \\ \text{s. a:} & x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

3. Prova que el programa:

$$\begin{cases} \min & z = 4y^2 + 3 \\ \text{s. a:} & x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

no es pot resoldre pel mètode directe però sí pel dels multiplicadors de Lagrange.

4. Una empresa, que fabrica dos articles A i B, sap que pot vendre 400 unitats de A a un preu unitari de 720 u.m. i que un estudi de mercat li ha permès conèixer que, per cada 10 u.m. de disminució en el preu de venda, es produiria un augment de 2 unitats en les seves vendes. El mateix estudi recomana mantenir el preu de venda de B en 1480 u.m. Si la funció de costos totals és:

$$C(x, y) = 5x^2 + 10y^2 + 50.000$$

on $x, y \geq 0$ indiquen, respectivament, el nombre d'articles A i B produïts: (a) Calcula el que s'hauria de produir per a maximitzar els beneficis. (b) Fes el mateix suposant que només es poden produir 100 articles entre A i B, tot indicant si millorarien els beneficis si es pogués augmentar la producció una unitat més.

5. Una empresa que es dedica a la col·locació de mosaic, moqueta i parquet sap que el benefici per m² que obté per la instal·lació de mosaic és de 2000 u.m., de 2400 u.m. per la moqueta i de 2800 u.m. pel parquet. Si els $x \geq 0$, $y \geq 0$ i $z \geq 0$ m² de mosaic, moqueta i parquet instal·lats satisfan l'equació:

$$x^2 + y^2 + 70z = 5375$$

determina els valors de $x, y, z \geq 0$ que maximitzen els beneficis totals i discuteix si millorarien en el cas que l'equació fos: $x^2 + y^2 + 70z = 5374$.