

1. OPTIMITZACIÓ

1.1 OPTIMITZACIÓ AMB RESTRICCIONS D'IGUALTAT.

1.1.1 PLANTEJAMENT FORMAL DEL PROBLEMA.

L'optimització matemàtica és un instrument clau en l'àmbit de l'economia i de l'empresa.

Hom pot dir que l'optimització permet assignar, de manera eficient, recursos escassos entre activitats econòmiques alternatives. Doncs bé, quan aquests recursos, a més, cal esgotar-los, l'optimització restringida ho serà per igualtats. A tall d'exemple, considerem el següent exemple econòmic:

Exemple: Se sap que la funció de producció d'un fabricant d'un cert producte P depèn de dos factors de producció, sent de tipus Cobb-Douglas de la forma:

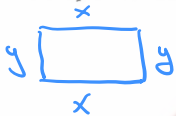
$$Q(x, y) = 4 \cdot x^{0,5} \cdot y^{0,5} \text{ unitats}$$

on $x > 0$ i $y > 0$ indiquen, respectivament, les unitats emprades en cadascun dels dos factors. Si els costos unitaris d'aquets factors són constants i iguals a 2 i 8 u.m., el fabricant vol esbrinar quin seria el cost mínim de produir 32 unitats de P, així com el nivell de cadascun dels dos factors emprats.

$$C(x, y) = 2x + 8y \text{ minimitzar}$$

$$4 \cdot x^{0,5} \cdot y^{0,5} = 32 \text{ restricció}$$

Obtener las dimensiones de un rectángulo de perímetro 100 m. que maximiza su área.

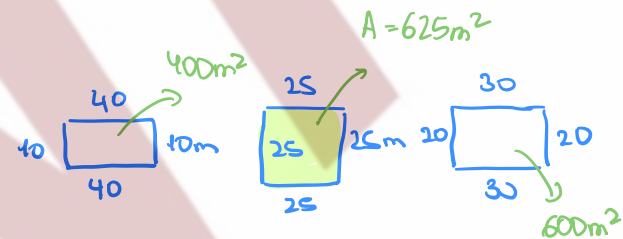


$$P = x + y + x + y \Rightarrow 2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$$

$$A = x \cdot y \text{ màxima} \Rightarrow A = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2 \text{ max}$$

$$A' = 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25 \text{ m}$$

$$A'' = -2 < 0 \text{ màxim}$$



Així doncs podem definir ara, amb tota generalitat, la noció de programa:

Definició: Un **programa d'òptims restringits** o **condicionats per igualtats** (programa a partir d'ara) és un problema d'optimització que adopta la forma:

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

$$f, \text{ escalar} \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

on:

1. $z = f(x_1, \dots, x_n)$ és la **funció escalar objectiu**.
2. $x_1, \dots, x_n$ són les n **variables instrumentals** o **de decisió**.
3. $g_i(x_1, \dots, x_n)$ són les m **funcions escalars de restricció**.
4. $b_1, \dots, b_m$ són les m **constants de restricció**.

Cal tenir en compte que, per regla general, el nombre m d'equacions de restricció ha de ser menor que el nombre n de variables instrumentals.

Conjunt i punt factible d'un programa

Definició: El **conjunt factible** (també dit **admissible** o **d'oportunitats**) d'un programa és el conjunt format per tots aquells punts del domini de la funció objectiu que satisfan totes les restriccions d'igualtat associades. De tot punt que hi pertany en direm **punt factible**.

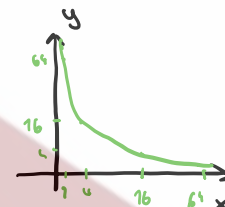
Exemple: Donat el programa:

$$\begin{aligned} \min \quad & C(x, y) = 2x + 8y \\ \text{s. a:} \quad & 4x^{0.5}y^{0.5} = 32 \end{aligned}$$

observamos

$$4 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 32 \Rightarrow \text{condición}$$

↓
reducción por $\sqrt{\quad}$



1. Determina el seu conjunt factible.

2. Prova que el punt (16,4) n'és un punt factible.

1) El conjunt factible és el conjunt format pel primer quadrant

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ y } 4\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 32\}$$

el conjunt factible és el punt (16,4) de la rama de la hipèrbole: $x \cdot y = 64$

2) (16,4) ∈ conjunt factible? Cumples la condició $x \cdot y = 64$? ✓

Òptim i valor òptim d'un programa.

$$\begin{cases} C(x, y) = 2x + 8y & \text{mínimo} \\ 4x^{0.5} \cdot y^{0.5} = 32 \end{cases}$$

Definició: El punt $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ és un **òptim** del programa:

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

si és un punt factible que optimitza la funció objectiu sobre el conjunt factible associat. Per definició, al valor que pren la funció objectiu en l'òptim:

$$z_0 = f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

li direm **valor òptim** del programa.

Òptims "lbres" (e. decir, los óptimos de funciones escalares sin restricciones) y óptimos con restricciones no siempre coinciden.

Ejemplo: $\max z = 1 - x^2 - y^2$ con restricción $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$x + y = 1$ óptimo libre $(0, 0)$

$y = 1 - x \Rightarrow z = 1 - x^2 - (1 - x)^2$

$z' = -2x + 2(1 - x) = 0 \Rightarrow -4x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$z'' = -2 - 2 < 0 \Rightarrow \max$

$y = \frac{1}{2}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0 \Rightarrow y = 0$

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $D_1 = -2$ $D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$

def neg $\Rightarrow$ máximo

Exemple: Aplicant el mètode directe troba els òptims dels programes:

$$(1) \begin{cases} \text{Opt} & z = 2xy \\ \text{s. a:} & x^2 + y = 3 \end{cases} \rightarrow z = 2x(3-x^2) = -2x^3 + 6x$$

optimitzar: $z = -2x^3 + 6x$

1) $z' = 0 \quad z' = -6x^2 + 6 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 6 \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ possible màxims o mínims

2) Comp. si son màxims o mínims

$$z''(a) < 0 \Rightarrow \text{màx}$$

$$z''(a) > 0 \Rightarrow \text{mín.}$$

$$z' = -6x^2 + 6$$

$$z'' = -12x$$

$$z''(1) = -12 < 0 \Rightarrow \text{màxim}$$

$$z''(-1) = 12 > 0 \Rightarrow \text{mínim}$$

$$x=1 \Rightarrow y = 3 - 1^2 = 2$$

$$x=-1 \Rightarrow y = 3 - (-1)^2 = 2$$

sol (1,2) màxim

(-1,2) mínim

les valors òptims

$$z(1,2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4 \text{ el valor màxim}$$

$$z(-1,2) = 2 \cdot (-1) \cdot 2 = -4 \text{ el valor mínim.}$$

$$(2) \begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y = 6 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 + y + y + z = 2 \Rightarrow z = -2y - 4 \\ x = 6 + y \end{cases}$$

$$u(y) = (6+y) \cdot y + 2(6+y)(-2y-4) + y(-2y-4) \\ = 6y + y^2 - 24y - 48 - 4y^2 - 8y - 2y^2 - 4y = -5y^2 - 30y - 48 \text{ màx}$$

$$u(y) = -5y^2 - 30y - 48 \text{ màx}$$

1) $u'(y) = 0 \quad u'(y) = -10y - 30 = 0 \quad y = \frac{30}{-10} = -3 \Rightarrow x = 6 + y \Rightarrow x = 6 - 3 = 3$

$$z = -2y - 4 \Rightarrow z = 6 - 4 = 2$$

2) Comp. que es un màxim: $u''(y) < 0$

$$u'(y) = -10 < 0 \text{ màxim.}$$

El màxim està en el punt (3, -3, 2)

El valor del màxim: $u(3, -3, 2) = 3(-3) + 2 \cdot 3 \cdot 2 + (-3) \cdot 2 \\ = -9 + 12 - 6 = -3$

Obtenir les dimensions d'un rectangle de périmètre 100 m. que maximise sa surface.



$$P = 2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50$$

$$A = x \cdot y$$

$$A = 25 \cdot 25 = 625 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} A(x, y) &= x \cdot y \quad \max \\ x + y &= 50 \Rightarrow y = 50 - x \Rightarrow y = 25 \\ A(x) &= x \cdot (50 - x) = 50x - x^2 \end{aligned}$$

$$1) A'(x) = 0 \quad A'(x) = 50 - 2x = 0 \quad x = 25$$

$$2) A''(25) < 0 \quad A''(x) = -2 < 0 \quad \max //$$

1.1.3. MÈTODE MULTIPLICADORS DE LAGRANGE

Definició: La **funció de Lagrange** associada al programa:

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases} \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

és la funció escalar de $n + m$ variables definida per:

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot (g_i(x_1, \dots, x_n) - b_i).$$

Les m variables $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ són els **multiplicadors de Lagrange** del programa.

Exemple: Determina la funció de Lagrange dels programes:

$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} \min & z = 2x + 8y \\ \text{s. a:} & 4x^{0.5}y^{0.5} = 32 \end{cases} & \quad (2) \begin{cases} \max & u = xy + 2yz + xz \\ \text{s. a:} & x + 2y + 3z = 1 \end{cases} & \quad (3) \begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(1) L(x, y, \lambda) = 2x + 8y - \lambda_1 \cdot (4x^{0.5}y^{0.5} - 32)$$

$$(2) L(x, y, z, \lambda_1) = xy + 2yz + xz - \lambda_1(x + 2y + 3z - 1)$$

$$(3) L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + 2xz + yz - \lambda_1(x + y + z - 2) - \lambda_2(x - y - 6)$$

Condició necessària d'optimització restringida Per igualtats. Punt crític d'un programa.

Teorema(Condició necessària d'optimització restringida per igualtats): Si $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ és un òptim del programa:

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

existiran necessàriament m multiplicadors de Lagrange $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0 \in \mathbb{R}$ tal que, juntament amb les n components de l'òptim, anul·len el gradient de la funció de Lagrange:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial x_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial x_n} &= 0 \\ \frac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial \lambda_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial \lambda_m} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Definició: Un **punt crític** (o **estacionari**) d'un programa és un punt factible que anul·la el vector gradient de la funció de Lagrange associada.

Exemple: Determina els punts crítics del programa
$$\begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases}$$

1) **Funció de Lagrange:**

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + 2xz + yz - \lambda_1(x + y + z - 2) - \lambda_2(x - y - 6)$$

2) $\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y + 2z - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x + z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (2) \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2x + y - \lambda_1 = 0 & (3) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= -(x + y + z - 2) = 0 & (4) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= -(x - y - 6) = 0 & (5) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Sumamos (1) + (2)

$$\begin{aligned} y + 2z - \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ x + z - \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \hline y + x + 3z - 2\lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \frac{x + y + 3z}{2}$$

$\Rightarrow 2x + y - \frac{x + y + 3z}{2} = 0 \Rightarrow 4x + 2y - x - y - 3z = 0 \Rightarrow 3x + y - 3z = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ x + y + z = 2 \\ x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 3 & 1 & -3 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -2 & -6 & | & -6 \\ 0 & -2 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -2 & -6 & | & -6 \\ 0 & 0 & 5 & | & 10 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 5z = 10 \Rightarrow z = 2$

$-2y - 6z = -6 \Rightarrow -2y - 12 = -6 \Rightarrow -2y = 6 \Rightarrow y = -3$

$x + y + z = 2 \Rightarrow x - 3 + 2 = 2 \Rightarrow x = 3$

$\lambda_1 = \frac{3 + (-3) + 3 \cdot 2}{2} = 3$

$\lambda_2 = -2$

El únic punt

crític $(x, y, z) = (3, -3, 2)$ amb multiplicadores de Lagrange: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$

Matriz hessiana restringida d'un programa

Definició: La **matriu hessiana restringida** d'un programa és, per definició, la matriu quadrada i simètrica que té per coeficients les derivades parcials segones de la funció de Lagrange respecte les variables instrumentals:

$$H_{x_1 \dots x_n} L(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Exemple: Calcula la matriu hessiana restringida del programa
$$\begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases}$$

1) **funció Lagrange:**

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + 2xz + yz - \lambda_1(x + y + z - 2) + \lambda_2(x - y - 6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y + 2z - \lambda_1 \rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 \\ &\rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 \\ &\rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 2 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x + z - \lambda_1 + \lambda_2 \rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0 \\ &\rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 1 \\ &\rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0$$

$$H L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Condició suficient d'existència d'òptims restringits per igualtats.

Teorema (Condició suficient d'existència d'òptims restringits per igualtats): Sigui

$(x_1^0, \dots, x_n^0)$ un punt crític del programa:

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

amb m multiplicadors de Lagrange associats $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0 \in \mathbb{R}$. Si la forma quadràtica de matriu simètrica associada:

$$H_{x_1 \dots x_n} L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$$

restringida al subespai vectorial definit pel sistema de m equacions lineals homogènies:

$$\begin{cases} 0 = \nabla g_1(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial g_1(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial g_1(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_n} \cdot x_n \\ \vdots \\ 0 = \nabla g_m(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial g_m(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial g_m(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_n} \cdot x_n \end{cases}$$

és:

1. Definida positiva, el punt crític $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ és un mínim del programa.
2. Definida negativa, el punt crític $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ és un màxim del programa.

Exemple: Prova, aplicant el mètode de Lagrange, que el punt crític $(3, -3, 2)$ amb

multiplicadors de Lagrange associats $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -2$ és un òptim (màxim) del programa:

$$\begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases}$$

$$g_1(x, y, z) = x + y + z - 2$$

$$g_2(x, y, z) = x - y - 6$$

$$H L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Forma quadràtica:

$$Q(x, y, z) = 0x^2 + 0y^2 + 0z^2 + 2xy + 4xz + 2yz$$

$$Q(x, y, z) = 2xy + 4xz + 2yz$$

$$\begin{cases} 0 = \nabla g_1(3, -3, 2) \cdot (x, y, z) \\ 0 = \nabla g_2(3, -3, 2) \cdot (x, y, z) \end{cases}$$

$$\nabla g_1(x, y, z) = (1, 1, 1) \Rightarrow \nabla g_1(3, -3, 2) = (1, 1, 1)$$

$$\nabla g_2(x, y, z) = (1, -1, 0) \Rightarrow \nabla g_2(3, -3, 2) = (1, -1, 0)$$

$$\begin{cases} (1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0 \\ (1, -1, 0) \cdot (x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\quad} \begin{cases} x + x + z = 0 & z = -2x \\ y = x \end{cases}$$

$$\langle (x, x, -2x) \rangle$$

$$Q(x, y, z) = 2xy + 4xz + 2yz$$

$$Q(x, x, -2x) = 2x \cdot x + 4x \cdot (-2x) + 2x \cdot (-2x) = 2x^2 - 8x^2 - 4x^2 = -10x^2 < 0 \Rightarrow \text{ÒPTIMO ÉS UN MÀXIMO.}$$

$$(3, -3, 2) \text{ és MÀXIMO; valor òptim: } u(3, -3, 2) = -9 + 12 - 6 = -3 //$$

Ejemplo 8.8. Optimizar la función:

$$f(x, y) = 6 - 4x - 3y$$

sujeto a la condición

$$x^2 + y^2 = 1.$$

$$\begin{aligned} (3) \quad x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ x^2 + \left(\frac{3x}{4}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$x^2 + \frac{9x^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{16x^2 + 9x^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{25x^2}{16} = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

3) Matriz Hessiana restringida:

$$H = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad H\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{5}{2}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad Q(x, y) = 5x^2 + 5y^2$$

$$4) \quad \nabla g\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right) \cdot (x, y) = 0$$

$$\frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y = 0 \Rightarrow 4x + 3y = 0 \quad y = -\frac{4x}{3} \quad \left(x, -\frac{4x}{3}\right)$$

$$Q\left(x, -\frac{4x}{3}\right) = 5x^2 + 5\left(-\frac{4x}{3}\right)^2 = 5x^2 + 5 \cdot \frac{16x^2}{9} = \frac{45x^2 + 80x^2}{9} > 0 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \text{ MÁXIMO.}$$

$$H\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad Q(x, y) = -5x^2 - 5y^2$$

$$\nabla g\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow -\frac{8}{5}x - \frac{6}{5}y = 0 \quad -4x - 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4x}{3}$$

$$\left(x, -\frac{4x}{3}\right) \quad Q\left(x, -\frac{4x}{3}\right) = -5x^2 - 5\left(-\frac{4x}{3}\right)^2 = -5x^2 - 5 \cdot \frac{16x^2}{9} = \frac{-45x^2 - 80x^2}{9} < 0 \Rightarrow \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \text{ MÍNIMO.}$$

Problema 8.10. Determina los extremos de las siguientes funciones con la condición que se indica:

b) $z = (x-1)^2 + y^2$ con la condición $y^2 = 9x$
 $y^2 - 9x = 0$

1) Función de Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 - \lambda(y^2 - 9x)$$

$$2) \quad \nabla L(x, y, \lambda)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2(x-1) + 9\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -(y^2 - 9x) = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} 2(x-1) + 9\lambda &= 0 & 2x - 2 + 9\lambda &= 0 & \lambda &= \frac{2-2x}{9} \\ 2y &= 2\lambda y & \lambda &= 1 \\ 2y - 2\lambda y &= 0 & 2y(1-\lambda) &= 0 & \lambda &= 1 \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} 1 &= \frac{2-2x}{9} \\ 9 &= 2-2x \\ x &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$y^2 + \frac{63}{2} = 0!!! \text{ IMPOSIBLE} \quad (0, 0, \frac{2}{9})$$

$$0 - 9x = 0 \mid x=0 \Rightarrow \lambda = \frac{2-0}{9} = \frac{2}{9}$$

$$Q(x, y) = 2x^2 + \frac{14}{9}y^2$$

$$4) \quad \nabla g(0, 0) \cdot (x, y) = 0 \quad (-9, 0) \cdot (x, y) = 0 \quad -9x = 0 \quad x=0$$

$$3) \quad H_{x,y} L\left(0, 0; \frac{2}{9}\right)$$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda \end{pmatrix} \quad H\left(0, 0; \frac{2}{9}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{14}{9} \end{pmatrix}$$

$$L(0, y) > \quad Q(x, y) = 2x^2 + \frac{14}{9}y^2 \quad Q(0, y) = \frac{14}{9}y^2 > 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ MÍNIMO.}$$

1.1.4. INTERPRETACIÓ ECONÒMICA DELS MULTIPLICADORS DE LAGRANGE

Teorema: Sigui $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ un òptim del programa:

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

Aleshores, si la constant de restricció $b_i \in \mathbb{R}$ experimenta una petita variació Δb_i ,

l'increment Δz_0 que repercuteix en el valor òptim del programa:

$$z_0 = f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

és aproximadament igual al producte del multiplicador de Lagrange corresponent λ_i^0 i de l'increment de la constant de restricció Δb_i . En altres paraules:

$$\Delta z_0 \cong \lambda_i^0 \cdot \Delta b_i.$$

- Si $\lambda_i^0 < 0$ i $\Delta b_i < 0$, el valor òptim z_0 augmentarà aproximadament $\lambda_i^0 \cdot \Delta b_i$.
- Si $\lambda_i^0 < 0$ i $\Delta b_i > 0$, el valor òptim z_0 disminuirà aproximadament $\lambda_i^0 \cdot \Delta b_i$.
- Si $\lambda_i^0 > 0$ i $\Delta b_i < 0$, el valor òptim z_0 disminuirà aproximadament $\lambda_i^0 \cdot \Delta b_i$.
- Si $\lambda_i^0 > 0$ i $\Delta b_i > 0$, el valor òptim z_0 augmentarà aproximadament $\lambda_i^0 \cdot \Delta b_i$.
- Si $\lambda_i^0 = 0$ aleshores, i independentment del valor de Δb_i , el valor òptim z_0 gairebé no variarà.²⁹

Exemple: Resol pel mètode de Lagrange el programa de l'exemple econòmic introductori:

$$\begin{aligned} \min \quad & C(x, y) = 2x + 8y \\ \text{s. a:} \quad & 4x^{0.5}y^{0.5} = 32 \end{aligned}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

tot indicant si és rendible produir una mica més de 32 unitats del producte P.

1) **Funció de Lagrange:** $L(x, y, \lambda_1) = 2x + 8y - \lambda_1(4x^{0.5}y^{0.5} - 32)$

$$\begin{aligned} 2) \quad \nabla L(x, y, \lambda_1) = 0 \quad & \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2 - \lambda_1 \cdot 2x^{-0.5}y^{0.5} = 0 & (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 8 - \lambda_1 \cdot 2x^{0.5}y^{-0.5} = 0 & (2) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(4x^{0.5}y^{0.5} - 32) = 0 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{2x^{-0.5}y^{0.5}} = \frac{1}{x^{-0.5}y^{0.5}} & (1) \\ \lambda_1 = \frac{8}{2x^{0.5}y^{-0.5}} = \frac{4}{x^{0.5}y^{-0.5}} & (2) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^{-0.5}y^{0.5}} = \frac{4}{x^{0.5}y^{-0.5}} \Rightarrow x^{0.5}y^{0.5} = 4x^{-0.5}y^{0.5} \Rightarrow \frac{x^{0.5}y^{0.5}}{x^{-0.5}y^{0.5}} = \frac{4x^{-0.5}y^{0.5}}{x^{-0.5}y^{0.5}} \Rightarrow x \cdot y^{-1} = 4 \Rightarrow \frac{x}{y} = 4 \end{aligned}$$

Tenemos $x = 4y$

$$(3) \quad 32 = 4x^{0.5}y^{0.5} \Rightarrow 32 = 4 \cdot (4y)^{0.5} \cdot y^{0.5} \Rightarrow 32 = 8y \quad \boxed{y = 4}$$

$$\text{Si } y = 4 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$3) \quad H L(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x^{-0.5}y^{0.5} & -\lambda_1 \cdot x^{-0.5}y^{-0.5} \\ -\lambda_1 \cdot x^{0.5}y^{-0.5} & \lambda_1 \cdot x^{0.5}y^{-1.5} \end{pmatrix} \Rightarrow H L(16, 4; 2) = \begin{pmatrix} 1/16 & -1/4 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4) \quad \text{La funció quadràtica: } g(x, y) = \frac{1}{16}x^2 + y^2 - \frac{1}{2}xy$$

$$\nabla g(x, y) = (2y^{0.5}x^{-0.5}, 2x^{0.5}y^{-0.5}) \Rightarrow \nabla g(16, 4) = (1, 4)$$

$$(x, y) = (1, 4) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow x + 4y = 0 \Rightarrow x = -4y \quad \langle (-4y, y) \rangle$$

$$f(-4y, y) = \frac{1}{16} \cdot (-4y)^2 + y^2 - \frac{1}{2} \cdot (-4y) \cdot y = y^2 + y^2 + 2y^2 = 4y^2 > 0 \Rightarrow \text{mínimo } (16, 4)$$

$$\text{valor óptimo: } 2 \cdot 16 + 8 \cdot 4 = \underline{64}$$

Solución: Como $\lambda_1 = 2 > 0$ no interesa producir

no ya que el coste mínimo es de 64 u.m., aumentará aproximadamente 2 u.m. por unidad producida:

$$\lambda_1 = 2 > 0 \quad \Delta b_1 = 1 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \Delta b_1 = 2 \Rightarrow \text{aumentaría 2 u.m.} \Rightarrow \text{No nos interesa.}$$

Exemple: Suposem que tenim una cartera d'inversió en dos títols amb unes rendibilitats esperades del 8% i del 4%. Si el risc de la inversió ve mesurat per la funció:

$$\sigma(x, y) = 0,0016x^2 + 0,0004y^2 - 0,00096xy \rightarrow \text{funció nesso}$$

on $x > 0$ i $y > 0$ denoten els tants per cent de la cartera invertits en cada títol, determina:

1. Els valors de $x > 0$ i $y > 0$ que minimitzen el risc de la cartera si volem obtenir una rendibilitat conjunta esperada del 5%.

2. Com es veuria afectat aquest risc si la rendibilitat esperada fos del 5,5%.

$$1) \min \left\{ \begin{aligned} f(x, y) &= 0,0016x^2 + 0,0004y^2 - 0,00096xy \\ 0,08x + 0,04y &= 0,05 \end{aligned} \right\}$$

$$2) \text{ Funció de Lagrange: } L(x, y; \lambda_1) = 0,0016x^2 + 0,0004y^2 - 0,00096xy - \lambda_1 \cdot (0,08x + 0,04y - 0,05)$$

$$3) \nabla L(x, y; \lambda) = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0,0032x - 0,00096y - 0,08\lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 0,0008y - 0,00096x - 0,04\lambda_1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{0,0032x - 0,00096y}{0,08} \\ \lambda_1 &= \frac{0,0008y - 0,00096x}{0,04} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(0,08x + 0,04y - 0,05) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{0,0032x - 0,00096y}{0,08} = \frac{0,0008y - 0,00096x}{0,04} \Rightarrow 0,000128x - 0,000064y = 0,000064y - 0,0000768x$$

$$0,0002048x = 0,0001024y \quad x = \frac{0,0001024}{0,0002048}y = \frac{1}{2}y \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

$$0,08x + 0,04 \cdot (2x) = 0,05$$

$$0,16x = 0,05 \quad x = \frac{0,05}{0,16} = \frac{5}{16} \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{5}{16} = \frac{5}{8} \quad \lambda_1 = \frac{1}{200} = 0,005$$

4) La Hessiana funció de Lagrange restringida.

$$H_{xy} L(x, y; \lambda_1) = \begin{pmatrix} 0,0032 & -0,00096 \\ -0,00096 & 0,0008 \end{pmatrix}$$

$$g(x, y) = 0,0032x^2 + 0,0008y^2 - 0,00192xy$$

$$5) \nabla g\left(\frac{5}{16}, \frac{5}{8}\right) \cdot (x, y) = 0$$

$$\nabla g(x, y) = (0,08, 0,04)$$

$$0,08x + 0,04y = 0 \Rightarrow 8x + 4y = 0 \quad 2x + y = 0 \quad y = -2x \quad \langle (x, -2x) \rangle$$

$$g(x, -2x) = 0,0032x^2 + 0,0008(-2x)^2 - 0,00192x \cdot (-2x)$$

$$= 0,0032x^2 + 0,0032x^2 + 0,00384x^2 > 0 \Rightarrow \left\langle \frac{5}{16}, \frac{5}{8}; \lambda = 0,005 \right\rangle$$

$$\underline{\underline{\Delta b_1}} = \begin{matrix} 0,055 & 0,05 & 0,045 \\ 5,5\% & 5\% & 4,5\% \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = 0,005 > 0 \quad \lambda_1 \cdot \Delta b_1 = 0,005 \cdot 0,005 = 25 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \text{el riesgo aproximadamente aumentaria en } \uparrow //$$

EXEMPLE: Una empresa produce dos tipos de bienes A y B en cantidades x e y respectivamente. El coste de producción de los mismos viene dado por la función $C(x, y) = y^2 + x(2x - y)$. Si entre los dos bienes producidos deben totalizarse 10 unidades, determina la cantidad de cada uno de ellos que minimizan el coste.

$$1) \min C(x, y) = y^2 + x(2x - y) = y^2 + 2x^2 - xy \quad \text{s.a. } x + y = 10 \quad g(x, y) = x + y - 10$$

$$2) \text{ Función Lagrange: } L(x, y, \lambda) = y^2 + 2x^2 - xy - \lambda(x + y - 10)$$

$$3) \nabla L(x, y, \lambda) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = 4x - y - \lambda &= 0 \quad (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - x - \lambda &= 0 \quad (2) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x + y - 10) &= 0 \quad (3) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\rightarrow 4x - y = \lambda \\ &\rightarrow 2y - x = \lambda \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} 4x - y &= 2y - x \rightarrow 5x = 3y \Rightarrow x = \frac{3y}{5} \\ (3) \Rightarrow \frac{3y}{5} + y &= 10 \Rightarrow 3y + 5y = 50 \Rightarrow y = \frac{50}{8} = \frac{25}{4} \\ x &= \frac{3 \cdot \frac{25}{4}}{5} = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

$$\lambda = 4 \cdot \frac{15}{4} - \frac{25}{4} = \frac{60 - 25}{4} = \frac{35}{4}$$

4) Hessian Restringida:

$$H(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H\left(\frac{15}{4}, \frac{25}{4}, \frac{35}{4}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad g(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 2xy$$

$$5) \nabla g\left(\frac{15}{4}, \frac{25}{4}, \lambda = \frac{35}{4}\right) \cdot (x, y) = 0 \quad \nabla g(x, y) = (1, 1)$$

$$(1, 1) \cdot (x, y) = 0 \quad x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(x, -x) &= 4x^2 + 2(-x)^2 - 2x(-x) \\ &= 4x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 8x^2 > 0 \\ &\Downarrow \\ &\text{mínimo } \left(\frac{15}{4}, \frac{25}{4}\right) \end{aligned}$$

EXEMPLE: Analiza las consecuencias que tendría en el ejercicio anterior la disminución en dos unidades del número total de bienes producidos, sin resolver nuevamente el problema.

$$\Delta b = -2 \quad (10 - 12)$$

$$\lambda = \frac{35}{4} = 8,75 \Rightarrow \text{si disminuyo 2 unidades el beneficio disminuye}$$

$$\lambda_1 \cdot \Delta b = 8,75(-2) = -17,5$$

EXAMPLE: Una empresa tiene la siguiente función de producción:
 $f(x, y) = 60x^{1/3}y^{2/3}$, donde x es el coste laboral e y el coste del capital. Si se dispone de 120 u.m., optimiza la función y halla el máximo de producción. Analiza qué ocurre si se aumenta en 5 unidades el presupuesto.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

1) $\max f(x, y) = 60x^{1/3}y^{2/3}$

sa: $x + y = 120$

2) Función Lagrange: $L(x, y; \lambda_1) = 60x^{1/3}y^{2/3} - \lambda(x + y - 120)$

3) $\nabla L(x, y; \lambda_1) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 20y^{2/3}x^{-2/3} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 40x^{1/3}y^{-1/3} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x + y - 120) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} 20y^{2/3}x^{-2/3} - \lambda &= 0 \\ 40x^{1/3}y^{-1/3} - \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 20y^{2/3}x^{-2/3} &= \lambda \\ 40x^{1/3}y^{-1/3} &= \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20y^{2/3}x^{-2/3} &= 40x^{1/3}y^{-1/3} \\ \downarrow \\ 1 &= \frac{40x^{1/3}y^{-1/3}}{20x^{-2/3}y^{2/3}} = 2x^{-1}y^{1/3} \Rightarrow \frac{y}{x} = 1 \end{aligned}$$

$$y = 2x$$

$$\frac{2x}{y} = 1$$

$$x + 2x = 120 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40 \Rightarrow y = 80 \Rightarrow \lambda = 31,748 \approx 31,75$$

4) $H_{x,y} L(x, y; \lambda)$

$$\begin{pmatrix} 20 \cdot (-\frac{2}{3}) x^{-5/3} y^{2/3} & 20 \cdot \frac{2}{3} y^{-1/3} x^{-2/3} \\ 40 \cdot \frac{1}{3} x^{1/3} y^{-4/3} & -\frac{40}{3} x^{1/3} y^{-4/3} \end{pmatrix} \Rightarrow H(40, 80) = \begin{pmatrix} -0,53 & 0,26 \\ 0,26 & -0,13 \end{pmatrix}$$

$$q(x, y) = -0,53x^2 + 0,13y^2 + 0,52xy$$

5) $\nabla g(x, y; \lambda) = 0$ $\nabla g(x, y) = (1, 1)$

$$(1, 1) \cdot (x, y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -x \quad \langle (x, -x) \rangle$$

$$q(x, -x) = -0,53x^2 + 0,13(-x)^2 + 0,52x(-x) = -0,53x^2 - 0,13x^2 - 0,52x^2 < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$

$$(40, 80) \\ \lambda = 31,75$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta b &= 5 \\ \lambda &= 31,75 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{el aumento será de } \frac{5 \cdot 31,75}{\lambda \cdot \Delta b} = \underline{\underline{158,7}}$$

OPTIMITZACIÓ AMB RESTRICCIONS D'IGUALTAT. EXERCICIS FINALS DEL TEMA

1. Resol aplicant el mètode directe:

$$(a) \begin{cases} \min & z = x^2 + 5xy - 1 \\ \text{s. a:} & 3x - y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\quad} \begin{aligned} z &= x^2 + 5x \cdot 3x - 1 \\ &= x^2 + 15x^2 - 1 \\ &= 16x^2 - 1 \end{aligned}$$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 + 5xy - 1$

$$\min z = 16x^2 - 1$$

$$z' = 32x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{32} = 0 \quad y = 3x \quad y = 3 \cdot 0 = 0$$

Comp. que es mínim:

$$z'' = 32 > 0 \Rightarrow \text{mínim}.$$

Conclusió: mínim (0,0)

$$\text{Valor óptim: } z = x^2 + 5xy - 1 = 0^2 + 5 \cdot 0 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$(b) \begin{cases} \max & u = xy + 3yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 6 \\ & x - y = 1 \end{cases}$$

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto xy + 3yz$

$$1) \begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - y &= 1 \end{aligned} \xrightarrow{\quad} \begin{aligned} 1 + y + y + z &= 6 \\ 2y + z &= 5 \end{aligned} \quad \boxed{z = 5 - 2y}$$

$$u(x, y, z) = u(1+y, y, 5-2y) = (1+y) \cdot y + 3y \cdot (5-2y) \\ = y + y^2 + 15y - 6y^2 = -5y^2 + 16y$$

$$u(y) = -5y^2 + 16y \quad \max. \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$y \mapsto -5y^2 + 16y$

$$u' = -10y + 16 = 0 \Rightarrow y = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 + y = 1 + \frac{8}{5} = \frac{13}{5} \\ z = 5 - 2y = 5 - 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{9}{5} \end{cases} \quad \left(\frac{13}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5} \right)$$

$$\text{Comp: } u'' = -10 < 0 \quad \text{màxim}$$

Conclusió: $\left(\frac{13}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5} \right)$ màxim

$$\text{Valor óptim: } u = \frac{13}{5} \cdot \frac{8}{5} + 3 \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{104}{25} + \frac{216}{25} = \frac{64}{5}$$

$$(c) \begin{cases} \max & u = 3xy + 2xyz \\ \text{s.a:} & 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto 3xy + 2xz$$

$$\downarrow \\ y = 1 + z - 2x$$

$$u = 3x \cdot (1 + z - 2x) + 2x \cdot (1 + z - 2x) \cdot z \\ = 3x + 3xz - 6x^2 + (2x + 2xz - 4x^2) \cdot z = 3x + 3xz - 6x^2 + 2xz + 2xz^2 - 4x^2z$$

$$u(x, z) = -6x^2 + 3x + 5xz + 2xz^2 - 4x^2z$$

$\downarrow$
máx

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, z) \longmapsto -6x^2 + 3x + 5xz + 2xz^2 - 4x^2z$$

$$1) \nabla u(x, z) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -12x + 3 + 5z + 2z^2 - 8xz = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 5x + 4xz - 4x^2 = 0 \quad (2)$$

$$\downarrow \\ (2) x(5 + 4z - 4x) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ 5 + 4z - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow 3 + 5z + 2z^2 = 0 \Rightarrow 2z^2 + 5z + 3 = 0$$

$$z = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4} \begin{cases} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$P_1(0, -1)$$

$$P_2(0, -\frac{3}{2})$$

$$\text{Si } 5 + 4z - 4x = 0 \Rightarrow \frac{5 + 4z}{4} = x \Rightarrow -12 \cdot \left[\frac{5 + 4z}{4} \right] + 3 + 5z + 2z^2 - 8 \cdot \left[\frac{5 + 4z}{4} \right] \cdot z = 0$$

$$-15 - 12z + 3 + 5z + 2z^2 - 10z - 8z^2 = 0$$

$$-6z^2 - 17z - 12 = 0 \quad 6z^2 + 17z + 12 = 0 \quad z = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 6 \cdot 12}}{2 \cdot 6} \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Si } z = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{5 + 4 \cdot (-\frac{3}{2})}{4} = -\frac{1}{4} \quad P_3(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2})$$

$$\text{Si } z = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{5 + 4 \cdot (-\frac{4}{3})}{4} = -\frac{1}{3} = -\frac{1}{12} \quad P_4(-\frac{1}{12}, -\frac{4}{3})$$

Nos quedan el
MÁXIMO.

2) Buscamos la matriz Hessiana.

$$H(x, z) = \begin{pmatrix} -12 - 8z & 5 + 4z - 8x \\ 5 + 4z - 8x & 4x \end{pmatrix}$$

$$H(0, -1) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} D_1 = -4 < 0 \\ D_2 = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \end{cases} \quad \text{Indefinida} \Rightarrow \text{punto silla.}$$

$$H(0, -\frac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \end{cases} \quad \text{Indefinida} \Rightarrow \text{punto silla.}$$

$$H(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0 \end{cases} \quad \text{Indef} \Rightarrow \text{punto silla.}$$

$$H(-\frac{1}{12}, -\frac{4}{3}) = \begin{pmatrix} -4/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} D_1 = -4/3 < 0 \\ D_2 = \begin{vmatrix} -4/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/3 < 0 \end{cases} \quad \text{def neg} \Rightarrow \text{MÁXIMO } (-\frac{1}{12}, -\frac{4}{3})$$

• Màxim $(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}, -\frac{4}{3})$. Valor òptimo $u = 3xy + 2xz$

$$y = 1 + z - 2x \\ = 1 - \frac{4}{3} - 2(-\frac{1}{6}) = -\frac{1}{6}$$

$$u = 3(-\frac{1}{12})(-\frac{1}{6}) + 2(-\frac{1}{12})(-\frac{1}{6})(-\frac{4}{3}) \\ = \frac{1}{216}$$

2. Resol pel mètode de Lagrange el programa: $\begin{cases} \max & u = xy + 2yz + xz \\ \text{s. a:} & x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

1) Funcció Lagrange: $L(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + xz - \lambda(x + 2y + 3z - 1)$

2) $\nabla L(x, y, z, \lambda) = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y + z - \lambda = 0 & (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + 2z - 2\lambda = 0 & (2) \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2y + x - 3\lambda = 0 & (3) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x + 2y + 3z - 1) = 0 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = \lambda \\ \frac{x + 2z}{2} = \lambda \\ \frac{2y + x}{3} = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 4y + 6z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{array} \right)$$

$$-10y = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x = 2y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + 3z = 1 \\ 3z = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \\ z = \frac{1}{15} \end{cases}$$

Punt crític

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15} \right) \quad \lambda = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

3) Matriu Hessiana restringida (de la funció Lagrange)

$$HL(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad HL\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

forma quadràtica:

$$q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 4yz$$

4) Subespai

$$\nabla q\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}\right) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow x + 2y + 3z = 0 \Rightarrow x = -2y - 3z \quad \langle (-2y - 3z, y, z) \rangle$$

$$q(-2y - 3z, y, z) = 2(-2y - 3z) \cdot y + 2(-2y - 3z) \cdot z + 4yz \\ = -4y^2 - 6yz - 4yz - 6z^2 + 4yz = -4y^2 - 6z^2 - 6yz$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = -4 \quad D_2 = -6 < 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 24 - 9 > 0$$

definita negativa $\Rightarrow$ Màxim.

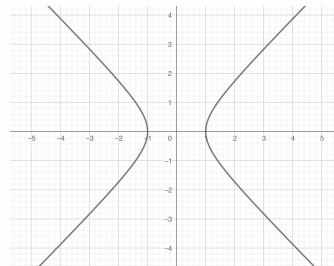
$$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15} \right) \text{ con } \lambda = \frac{4}{15}$$

$$\text{Valor màxim: } u = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{15} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$$

5. Prova que el programa:

$$\begin{cases} \min & z = 4y^2 + 3 \\ \text{s. a:} & x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

no es pot resoldre pel mètode directe però sí pel dels multiplicadors de Lagrange.



1) Funcció de Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = 4y^2 + 3 - \lambda(x^2 - y^2 - 1)$$

2) $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -2x\lambda \stackrel{(1)}{=} 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 8y + 2y\lambda \stackrel{(2)}{=} 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -(x^2 - y^2 - 1) \stackrel{(3)}{=} 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (1) &\Rightarrow -2x\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \text{descartem} \\ \lambda=0 \end{cases} \\ (3) &\text{ Si } x=0 \Rightarrow -y^2 - 1 = 0 \quad \nexists \end{aligned}$$

$$(2) \quad 8y + 2y \cdot 0 = 0 \Rightarrow 8y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$(3) \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$P_1(1, 0) \quad \lambda = 0 \quad P_2(-1, 0) \quad \lambda = 0$$

3) Matriu Hessiana restringida:

$$H L(x, y) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \lambda=0 \quad H L(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{forma quadràtica: } q(x, y) = 0x^2 + 8y^2 + 0xy = 8y^2 > 0$$

4) Subespai $(x^2 - y^2 - 1)$

$$\nabla g(1, 0) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow (2, 0)(x, y) = 2x = 0 \quad \langle (0, y) \rangle$$

$$(2x, -2y)|_{(1, 0)} = (2, 0)$$

$$\nabla g(-1, 0) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow (-2, 0)(x, y) = -2x = 0 \quad \langle (0, y) \rangle$$

$$(2x, -2y)|_{(-1, 0)} = (-2, 0)$$

$$q(x, y) = 8y^2$$

$$q(0, y) = 8y^2 > 0 \Rightarrow \text{def. positiva} \Rightarrow \text{mínim} \rightarrow \begin{cases} (1, 0) \quad \lambda = 0 \\ (-1, 0) \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\text{El valor del mínim: } z = 4y^2 + 3$$

$$z(1, 0) = 4 \cdot 0^2 + 3 = 3$$

$$z(-1, 0) = 4 \cdot 0^2 + 3 = 3 //$$

4. Una empresa, que fabrica dos articles A i B, sap que pot vendre 400 unitats de A a un preu unitari de 720 u.m. i que un estudi de mercat li ha permès conèixer que, per cada 10 u.m. de disminució en el preu de venda, es produiria un augment de 2 unitats en les seves vendes. El mateix estudi recomana mantenir el preu de venda de B en 1480 u.m. Si la funció de costos totals és:

$$C(x, y) = 5x^2 + 10y^2 + 50.000$$

on $x, y \geq 0$ indiquen, respectivament, el nombre d'articles A i B produïts: (a) Calcula el que s'hauria de produir per a maximitzar els beneficis. (b) Fes el mateix suposant que només es poden produir 100 articles entre A i B, tot indicant si millorarien els beneficis si es pogués augmentar la producció una unitat més.

Beneficis $\Rightarrow$ Ingresos - costs

$$x \cdot P_A + y \cdot P_B - C(x, y)$$

$$x \cdot (720 - 10 \cdot \frac{x-400}{2}) + y \cdot 1480$$

$$x = 400 + 2z$$

$$\frac{x-400}{2} = z$$

$$B(x, y) = (720 - 5x + 2000)x + 1480y - [5x^2 + 10y^2 + 50000]$$

$$= 2720x - 5x^2 + 1480y - 5x^2 - 10y^2 - 50000$$

$$= -10x^2 + 2720x + 1480y - 10y^2 - 50000 \text{ max.}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} &= -20x + 2720 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial y} &= 1480 - 20y = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= \frac{2720}{20} = 136 \\ y &= \frac{1480}{20} = 74 \end{aligned}$$

Comprovar que es màxim:

$$H_{xy} = \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{aligned} D_1 &= -20 < 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -20 \end{vmatrix} = 400 > 0 \end{aligned} \right\} \text{def. negativa} \Rightarrow \text{MÀXIMO} (136, 74)$$

$$y = f(x)^n$$

$$y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$$

b) $B(x, y) = -10x^2 + 2720x + 1480y - 10y^2 - 50000$
 $x + y = 100 \text{ r.a.} \rightarrow \text{despejo } y = 100 - x$

$$B(x) = -10x^2 + 2720x + 1480(100 - x) - 10(100 - x)^2 - 50.000$$

$$B'(x) = -20x + 2720 - 1480 - 20(100 - x)^2 \cdot (-1)$$

$$= -20x + 1240 + 2000 - 20x = -40x + 3240 = 0 \quad x = \frac{3240}{40} = 81$$

$$B''(x) = -40 < 0 \text{ m\u00e0x.}$$

El m\u00e0xim $\Rightarrow x = 81 \Rightarrow y = 100 - 81 = 19$

Valor \u00f3ptimo: a) $B(136, 74) = -10 \cdot 136^2 + 2720 \cdot 136 - 10 \cdot 74^2 + 1480 \cdot 74 - 50000$
 $= 189720$

b) $B(81, 19) = -10 \cdot 81^2 + 2720 \cdot 81 + 1480 \cdot 19 - 10 \cdot 19^2 - 50.000$
 $= 129220 //$

Articulo (A)

Preu	unitats
720	400
710	402
$(720 - 10z)$	$(400 + 2z) = x$

$z \rightarrow n^{\circ}$ de veges que dism 10um

Articulo B

Preu $\Rightarrow 1480 \text{ u.m.}$

5. Una empresa que es dedica a la col·locació de mosaic, moqueta i parquet sap que el benefici per m² que obté per la instal·lació de mosaic és de 2000 u.m., de 2400 u.m. per la moqueta i de 2800 u.m. pel parquet. Si els $x \geq 0, y \geq 0$ i $z \geq 0$ m² de mosaic, moqueta i parquet instal·lats satisfan l'equació:

$$x^2 + y^2 + 70z = 5375$$

determina els valors de $x, y, z \geq 0$ que maximitzen els beneficis totals i discuteix si millorarien en el cas que l'equació fos: $x^2 + y^2 + 70z = 5374$.

Plantejamos: $B(x, y, z) = 2000 \cdot x + 2400 \cdot y + 2800 \cdot z$
 r.a $x^2 + y^2 + 70z = 5375$

1) Multiplicador Lagrange:

$$L(x, y, z, \lambda) = 2000x + 2400y + 2800z - \lambda(x^2 + y^2 + 70z - 5375)$$

2) $\nabla L(x, y, z, \lambda) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2000 - 2x\lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2400 - 2y\lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2800 - 70\lambda = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 + 70z - 5375) = 0 \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow 2800 - 70\lambda = 0 \quad \lambda = \frac{2800}{70} = 40$$

$$(1) \Rightarrow 2000 - 80x = 0 \quad x = \frac{2000}{80} = 25$$

$$(2) \Rightarrow 2400 - 80y = 0 \quad y = \frac{2400}{80} = 30$$

$$(4) \Rightarrow 25^2 + 30^2 + 70z - 5375 = 0$$

$$70z = 5375 - 625 - 900$$

$$70z = 3850 \quad z = \frac{3850}{70} = 55$$

Tenem un únic punt crític: $(25, 30, 55)$ $\lambda = 40$

3) Tenem que veure que realment és màxim $\Rightarrow H L(x, y, z)$

$$H L(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H L(25, 30, 55) = \begin{pmatrix} -80 & 0 & 0 \\ 0 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = 40$$

$$q(x, y, z) = -80x^2 - 80y^2 + 0z^2$$

4) $\nabla q(x, y, z) \quad \nabla q(x, y, z) = (2x, 2y, 70)$

$$\nabla q(25, 30, 55) = (50, 60, 70)$$

$$\nabla q(25, 30, 55) \cdot (x, y, z) = 0$$

$$50x + 60y + 70z = 0 \Rightarrow 5x + 6y + 7z = 0$$

$$z = \frac{-5x - 6y}{7}$$

$$q(x, y, \frac{-5x - 6y}{7}) = q(x, y) = -80x^2 - 80y^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -80 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = -80 < 0 \quad D_2 = -80 < 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -80 & 0 \\ 0 & -80 \end{vmatrix} = +6400 > 0$$

definida negativa



máximo

$$(25, 30, 55) \quad \lambda = 40$$

$\lambda = 40$ Pasamos de 5375 a 5374



disminuimos 1 u.m.

disminuyen las ganancias, aproximadamente, $\lambda \cdot \Delta b = 40 \text{ u.m.}$

El beneficio que tenemos

$$\begin{aligned} B(x, y, z) &= B(25, 30, 55) = 2000 \cdot 25 + 2400 \cdot 30 + 2800 \cdot 55 \\ &= 276000 \text{ u.m.} // \end{aligned}$$