

PREGUNTES EXÀMENS FINALS TIPO TEST

1. Donat el problema d'òptims condicionats següent:

$$\text{Opt. } f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z$$

$$\text{s.a. } 3x + 2y + z = 1 \quad \text{mètode directe}$$

aquest problema d'òptims condicionats verifica que:

- (a) té un únic punt crític,
- (b) té dos punts crítics,
- (c) no té punts crítics,
- (d) el punt (0,0,1) és un punt crític del problema.

Tenemos 2 puntos críticos

$$(1, 1), (-1, 1)$$

$$z = 1 - 3x - 2y$$

$$f(x, y) = x^3 + y^2 + 1 - 3x - 2y \quad \text{óptimos}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3 = 0 & (1) \quad 3x^2 &= 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y - 2 = 0 & (2) \quad 2y &= 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x^2 &= 1 & x &= \pm 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Enunciat de les preguntes 2, 3 i 4

Donat el següent problema d'optimització condicionada:

$$\text{Opt. } f(x, y, z) = x + 2y - z$$

$$\text{s.a. } x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$$

si considerem com a funció de Lagrange associada al problema la funció

$$L(x, y, z, \lambda) = x + 2y - z - \lambda(x^2 + 2y^2 + z^2 - 2)$$

2. Els seus punts crítics, amb els multiplicadors de Lagrange associats, són:

- (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ amb $\lambda = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ i $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ amb $\lambda = \frac{-\sqrt{2}}{2}$,
- (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ amb $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ amb $\lambda = \frac{-\sqrt{2}}{2}$,
- (c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ amb $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ amb $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
- (d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ amb $\lambda = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ i $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ amb $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$1) \nabla L(x, y, z; \lambda)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 - 2\lambda x = 0 & (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2 - 4\lambda y = 0 & (2) \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -1 - 2\lambda z = 0 & (3) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -(x^2 + 2y^2 + z^2 - 2) = 0 & (4) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (1) \quad x &= \frac{1}{2\lambda} \\ (2) \quad y &= \frac{2}{4\lambda} = \frac{1}{2\lambda} \\ (3) \quad z &= -\frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - 2 = 0 \quad \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{4}{4\lambda^2} = 2 \quad \frac{1}{\lambda^2} = 2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ Si } \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet \text{ Si } \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. Podem afirmar que la matriu hessiana de la funció de Lagrange respecte a les variables x, y, z és:

$$(a) \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -2\lambda \\ -\lambda & 0 & -4\lambda \\ -2\lambda & -4\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda x & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 4\lambda y & 0 \\ 0 & 0 & -1 - 2\lambda z \end{pmatrix}$$

Buscamos la matriz Hessiana de $L(x, y, z)$

$$H_{L(x, y, z)} = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

4. Podem afirmar que en el punt crític $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ es verifica que:

- (a) com que la Hessiana en aquest punt crític és definida negativa, podem afirmar que el punt crític és un màxim,
- (b) el punt crític és un mínim, doncs la matriu Hessiana és indefinida, però $\nabla f = (1, 2, -1)$ i tots els components són positius,
- (c) per saber si aquell punt crític és òptim, caldria estudiar el signe de la matriu Hessiana restringida a $2x + 4y + 2z = 0$,
- (d) com que la Hessiana en aquest punt crític és indefinida, podem afirmar que es tracta d'un punt de sella.

$$HL(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2}}{2}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$q(x, y, z) = -\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}y^2 - \sqrt{2}z^2$$

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 4y, 2z) \quad \nabla g(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = (\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}})$$

$$z = x + 2y$$

$$\nabla g \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}}x + \frac{4}{\sqrt{2}}y - \frac{2}{\sqrt{2}}z = 0 \Rightarrow 2x + 4y - 2z = 0 \Rightarrow x + 2y - z = 0$$

$$\langle (x, y, x+2y) \rangle$$

$$q(x, y, x+2y) = -\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}y^2 - \sqrt{2}(x+2y)^2 = -2\sqrt{2}x^2 - 6\sqrt{2}y^2 - 4\sqrt{2}xy$$

$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -6\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$D_1 = -2\sqrt{2} < 0 \quad D_2 = -6\sqrt{2} < 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -6\sqrt{2} \end{vmatrix} = \underbrace{(-2\sqrt{2})(-6\sqrt{2})}_{12 \cdot 2} - \underbrace{(-2\sqrt{2})(-2\sqrt{2})}_{4 \cdot 2} > 0$$

def neg
↓
màxim

5. En un problema d'optimització restringit per la igualtat $2x^2y + yz = 5$, hem considerat la funció

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda(2x^2y + yz - 5)$$

com a funció de Lagrange associada al problema. Si se sap que en el punt $(1, 1, 3)$ aquest problema té un mínim i el valor del multiplicador de Lagrange en aquest punt mínim és $\lambda = -4$. Amb aquestes dades, si modifiquem el terme independent de la restricció considerant $2x^2y + yz = 5,1$, aleshores aplicant la interpretació dels multiplicadors de Lagrange, podem afirmar que el valor de la funció objectiu en el nou punt mínim

$$\text{Mínimo } (1, 1, 3)$$

$$\lambda = -4$$

$$\text{Cambiamos } b = 5 \rightarrow 5,1$$

$$\Delta b = 0,1$$



disminuye aproximadamente

$$\lambda \cdot \Delta b = 0,4 //$$

- (a) augmentarà aproximadament en 4 unitats,
- (b) disminuirà aproximadament en 4 unitats,
- (c) augmentarà aproximadament en 0,4 unitats,
- (d) disminuirà aproximadament en 0,4 unitats.

Enunciat de les preguntes 1 i 2

Donat el següent problema d'òptims condicionats:

$$\text{Opt. } f(x, y) = xy + x + 2y$$

$$\text{s.a. } x - 2y = 52$$

$$\text{metodo directo: } x = 52 + 2y \rightarrow x = 52 + 2(-14) = 24$$

1. Aquest problema d'òptims condicionats verifica que:

- (a) el punt $(x, y) = (24, -14)$ és l'únic punt crític del problema,
- (b) el punt $(x, y) = (76, 12)$ és l'únic punt crític del problema,
- (c) el punt $(x, y) = (26, -13)$ és l'únic punt crític del problema,
- (d) té dos punts crítics.

$$f(52+2y, y) = (52+2y) \cdot y + 52+2y+2y$$

$$f(y) = 56y + 2y^2 + 52$$

$$f'(y) = 56 + 4y = 0$$

$$y = \frac{56}{-4} = -14$$

$$\text{obs: } f(y) = 2y^2 + 56y + 52$$

$$\text{paràbola } a=2>0$$

↓
mínimo

Tenemos un punto crítico $(24, -14)$

$$f''(y) = 4 > 0 \Rightarrow \text{mínimo } (24, -14)$$

$$\text{recordad: } f'(a) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} f''(a) > 0 & \text{mínimo} \\ f''(a) < 0 & \text{máximo} \end{matrix}$$

2. D'aquest problema podem afirmar que:

- (a) l'únic punt crític del problema és un màxim,
- (b) l'únic punt crític del problema és un mínim,
- (c) el valor de la funció objectiu a l'òptim és -338,
- (d) el problema no té ni un màxim ni un mínim.

Enunciat de les preguntes 3 i 4

Donat el següent problema d'optimització condicionada:

$$\begin{array}{ll} \text{Opt.} & f(x, y) = 2x - y \\ \text{s.a} & 2x^2 + y = 0 \end{array}$$

si considerem com a funció de Lagrange associada al problema la funció

$$L(x, y, \lambda) = 2x - y - \lambda(2x^2 + y)$$

3. Aquest problema d'òptims condicionats verifica que:

- (a) el punt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ és punt crític del problema amb multiplicador de lagrange $\lambda = 1$,
- (b) el punt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ és l'únic punt crític del problema,
- (c) el multiplicador de lagrange, associat a l'únic punt crític del problema, és $\lambda = -1$,
- (d) NO té punts crítics.

$$(2) \Rightarrow -1 \cdot \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{-1 = \lambda} \quad (1) \Rightarrow 2 - 4x(-1) = 0 \Rightarrow 2 = -4x \quad x = -\frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

$$(3) \Rightarrow 2x^2 + y = 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} + y = 0 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}}$$

Teremos un único punto crítico $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ para $\lambda = -1$

4. Podem afirmar que la matriu hessiana de la funció de Lagrange respecte a les variables x, y és:

(a) $\begin{pmatrix} -4\lambda x & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -4\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & -4\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 - 4\lambda x & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$

Matriu Hessiana restringida $L(x, y)$

$$H_{L(x, y)} = \begin{pmatrix} -4\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. En resoldre, pel mètode de Lagrange, el següent problema d'òptims condicionats:

$$\begin{array}{ll} \text{Opt.} & f(x, y, z) \\ \text{s.a} & 11x + 35y - 34z = 3530 \end{array}$$

considerant com a funció de Lagrange associada a aquest problema la funció:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda(11x + 35y - 34z - 3530),$$

s'ha obtingut que en l'òptim d'aquest problema el valor del multiplicador de Lagrange és $\lambda = -4$. Si considerem la restricció $11x + 35y - 34z = 3526$ en lloc de la restricció inicial, aleshores podem afirmar que el valor de la funció objectiu en el nou òptim:

- (a) disminuirà aproximadament en 8 unitats,
- (b) augmentarà aproximadament en 16 unitats,
- (c) disminuirà aproximadament en 4 unitats,
- (d) augmentarà aproximadament en 6 unitats.

Si $\lambda = -4$

$$11x + 35y - 34z = 3526$$

$$\Delta b = -4 \downarrow 4 \text{ unidades}$$

$$\Delta b \cdot \lambda = 16$$

Teremos que aumentará, aproximadamente, 16 unidades //

1. Donat el següent problema d'òptims condicionats:

$$\begin{array}{l} \text{Opt. } f(x, y) = x^2 - xy \\ \text{s.a.: } 3x^2 + y = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{substitució}} y = -3x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} f(x, -3x^2) = x^2 - x \cdot (-3x^2) \\ = x^2 + 3x^3 \end{array}$$

en resoldre pel mètode directe o de substitució, podem afirmar que:

- (a) no té mínim ni té màxim,
- (b) té màxim però no té mínim,
- (c) té mínim però no té màxim,
- (d) té màxim i té mínim.

$$\text{Opt } f(x) = x^2 + 3x^3$$

$$f'(x) = 2x + 9x^2 = 0$$

$$x(2 + 9x) = 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow 2 + 9x = 0 \\ \rightarrow x = -\frac{2}{9} \end{array}$$

Tenemos 2 puntos críticos:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (0, 0)$$

$$x = -\frac{2}{9} \Rightarrow y = -3\left(-\frac{2}{9}\right)^2 = -3 \cdot \frac{4}{81} = -\frac{12}{81} \quad \left(-\frac{2}{9}, -\frac{12}{81}\right)$$

Para ver si son máximos

o mínimos:

$$f''(x) = 2 + 18x$$

$$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{mínimo } (0, 0)$$

$$f''\left(-\frac{2}{9}\right) = 2 + 18\left(-\frac{2}{9}\right) = -2 < 0 \quad \text{máximo } \left(-\frac{2}{9}, -\frac{12}{81}\right)$$

2. Si resolom un problema d'optimització subjecte a la restricció $x + y = 4$ usant el mètode de Lagrange, obtenim que $(x = 2, y = 2, \lambda = 16)$ és un punt crític. Tenint en compte que la matriu Hessiana associada a la funció de Lagrange respecte a les variables x i y és:

$$H_{(x,y)} L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

aleshores es verifica que en el punt $(x = 2, y = 2)$ el problema:

- (a) assoleix un màxim,
- (b) assoleix un mínim,
- (c) assoleix un punt de sella,
- (d) cap de les anteriors.

$$(2, 2) \quad x = 16$$

$$H_{L(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 12xy$$

$$\nabla q(x, y) \quad (1, 1) \cdot (x, y) = 0$$

$$x + y = 0 \quad \text{Subespacio}$$

$$y = -x \quad \langle (x, -x) \rangle$$

$$\begin{aligned} q(x, -x) &= 2x^2 + 2(-x)^2 + 12x(-x) \\ &= 2x^2 + 2x^2 - 12x^2 = -8x^2 < 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ màxim

Enunciat de les preguntes 3 i 4

Donat el problema d'òptims condicionats següent:

$$\begin{array}{l} \text{Opt. } f(x, y) = x + 2y \\ \text{s.a.: } x^2 + y^2 = 5 \end{array}$$

Considerem com a funció de Lagrange, associada a aquest problema la funció:

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 5).$$

3. Podem afirmar que el problema:

- (a) té un únic punt crític,
- (b) té dos punts crítics,
- (c) no té punts crítics,
- (d) cap de les anteriors.

$$1) \quad L(x, y, \lambda) = x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

$$\nabla L(x, y, \lambda) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 5) = 0 \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow 1 = 2\lambda x \Rightarrow x = \frac{1}{2\lambda}$$

$$(2) \Rightarrow 2 = 2\lambda y \Rightarrow y = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$(3) \Rightarrow x^2 + y^2 - 5 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 5 \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 5 \Rightarrow \frac{5}{4\lambda^2} = 5 \Rightarrow 5 = 20\lambda^2$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \Rightarrow x = \frac{1}{1-1/2} = 1 \quad y = \frac{1}{1/2} = 2 \quad (1, 2) \quad \lambda = 1/2$$

$$\text{Si } \lambda = -1/2 \Rightarrow x = \frac{1}{1-(-1/2)} = -1 \quad y = \frac{1}{-1/2} = -2 \quad (-1, -2) \quad \lambda = -1/2$$

4. Podem afirmar que el valor del multiplicador de Lagrange, en el màxim d'aquest problema és:

- (a) $\lambda = 1/2$,
- (b) $\lambda = -1/2$,
- (c) $\lambda = -1$,
- (d) cap dels anteriors.

Matriz Hessiana restringida x, y

$$H_{L_{x,y}} = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

* Si $\lambda = 1/2 \Rightarrow (1, 2)$

$$H_{L_{x,y}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad q(x, y) = -x^2 - y^2$$

$$\nabla q(1, 2) \cdot (x, y) = 0$$

$$\nabla q(x, y) = (2x, 2y)$$

$$\nabla q(1, 2) = (2, 4)$$

$$(2, 4) \cdot (x, y) = 0 \quad \langle (-2y, y) \rangle$$

$$2x + 4y = 0 \quad x + 2y = 0 \quad x = -2y$$

$$q(-2y, y) = -(-2y)^2 - y^2 = -5y^2 < 0 \Rightarrow \text{màxim } (1, 2) \quad \lambda = 1/2$$

* Si $\lambda = -1/2 \Rightarrow (-1, -2)$

$$H_{L_{x,y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad q(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla q(-1, -2) \cdot (x, y) = 0$$

$$\nabla q(-1, -2) = (-2, -4)$$

$$(-2, -4) \cdot (x, y) = 0 \quad -2x - 4y = 0$$

$$2x + 4y = 0 \quad x + 2y = 0 \quad x = -2y$$

$$q(-2y, y) = (-2y)^2 + y^2 = 5y^2 > 0$$

$$\Rightarrow \text{mínim } (-1, -2) \quad \lambda = -1/2$$

5. En resoldre, pel mètode de Lagrange, el problema d'òptims condicionats:

$$\text{Opt. } f(x, y, z)$$

$$\text{s.a.: } g(x, y, z) = 100$$

i considerant com a funció de Lagrange associada la funció $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda \cdot (g(x, y, z) - 100)$, s'ha obtingut que el problema aconsegueix l'òptim en el punt $(x = 2, y = 5, z = 11)$ i el valor òptim és $f(2, 5, 11) = 4300$. Si sabem que un augment de 1.5 unitats en el terme independent de la restricció, implica que el valor òptim del nou problema augmenta aproximadament en 114 unitats (és a dir, passa de 4300 a 4414), aleshores el multiplicador de Lagrange és:

- (a) $\lambda = 7.6$,
- (b) $\lambda = 76$,
- (c) $\lambda = 114$,
- (d) $\lambda = 11$.

$$\lambda \cdot \Delta b = 1.5 \cdot \lambda = 114$$

$$\lambda = \frac{114}{1.5} = 76 //$$

màxim

$$(2, 5, 11)$$

$\lambda = ?$

$$f(2, 5, 11) = 4300$$

$$\text{s.e.: } g(x, y, z) = 100$$

$$g(x, y, z) = 101.5$$

$$\Delta b = 1.5$$